Vettori.

Il vettore è un ente geometrico rappresentato da un segmento orientato, che è caratterizzato da una direzione, da un verso e da un modulo. Il punto di partenza si chiama coda (o punto di applicazione) , e il punto di arrivo si chiama punta.

Il vettore si indica con una lettera con sopra una freccia, oppure con le lettere indicanti gli estremi del segmento orientato. $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ A $\longrightarrow$ B. Il modulo si indica la lettera senza freccia , v, oppure con $|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}|$

- Due vettori si dicono uguali se hanno stessa direzione, stesso verso, stesso modulo.
- Due vettori uguali possono avere differenti punti di applicazione.
- Due vettori si dicono paralleli se hanno la stessa direzione.

Moltiplicazione tra un vettore e uno scalare

Il prodotto tra un vettore $\vec{v}$ e uno scalare k è uguale ad un vettore $\vec{w} = k\vec{v}$ che ha come direzione quella di $\vec{v}$, modulo $k|\vec{v}|$, e stesso verso se k>0, verso contrario se k<0.

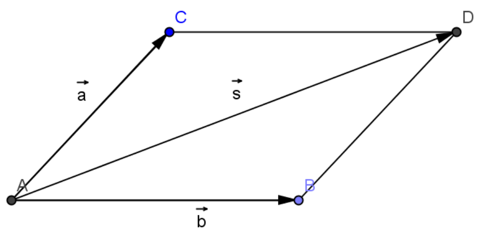
Due vettori si dicono opposti se hanno stessa direzione, stesso modulo ma direzione opposte, e si indica con $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

Somma tra due vettori metodo del parallogramma e metodo punto coda

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ la somma di due vettori è uguale ad un vettore $\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}$

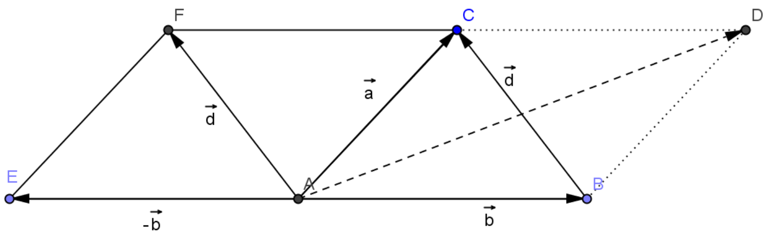
La cui costruzione avviene in questo modo:

1) si prendo due rappresentanti aventi stessa l'origine coincidente
2) si costruisce un parallelogramma, avente come lati i due vettori.
   Il vettore $\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}$ coincide con la diagonale avente un estremo nella coda comune, e come punta l'altro estremo . $\overrightarrow{AD}$ in figura.



Differenza tra due vettori. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$

La definisco come somma $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$



Osservo che il vettore differenza $\overrightarrow{AF}$ è uguale con il vettore $\overrightarrow{BC}$ e quindi.

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e costruito il parallelogramma su di essi, la diagonale che ha estremo nella coda comune rappresenta il vettore somma avente stessa coda, l'altra diagonale rappresenta la differenza, avente coda nella punta del primo vettore e come punta la punta del secondo vettore. (metodo punto coda)

Componenti di un vettore.

Un vettore si può rappresentare in piano cartesiano.

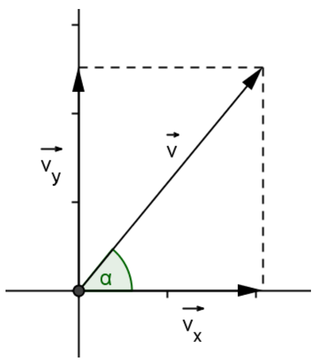
Sia $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ un vettore e siano i punti $A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ i suoi estremi.

Si chiamano componenti del vettore $\vec{v}$, le proiezioni orientate sull'asse x e sulla y. E si indicano con

$\overrightarrow{v_x}$ e $\overrightarrow{v_y}$ e le componenti sono tali che $\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$. Spesso il vettore si indica con

$\vec{v}(\mathrm{v_x}, \mathrm{v_y}) = \vec{v}(\mathrm{x_B} - \mathrm{x_A}, \mathrm{y_B} - \mathrm{y_A})$

Dal grafico sotto risulta che $v_x = v \cdot cos\alpha$ $v_y = v \cdot sin\alpha$



Le relazioni che caratterizzano vettore e componenti sono

$$\begin{cases} v_x = v\cos\alpha \\ v_y = v\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} v^2 = v_x^2 + v_y^2 \\ \alpha = \tan^{-1}\dfrac{v_y}{v_x} \end{cases}$$

Somma e differenza di due vettori.

Siano dati due vettori $\vec{v}(\mathrm{v_x}, \mathrm{v_y})$ e $\vec{w}(\mathrm{w_x}, \mathrm{w_y})$.

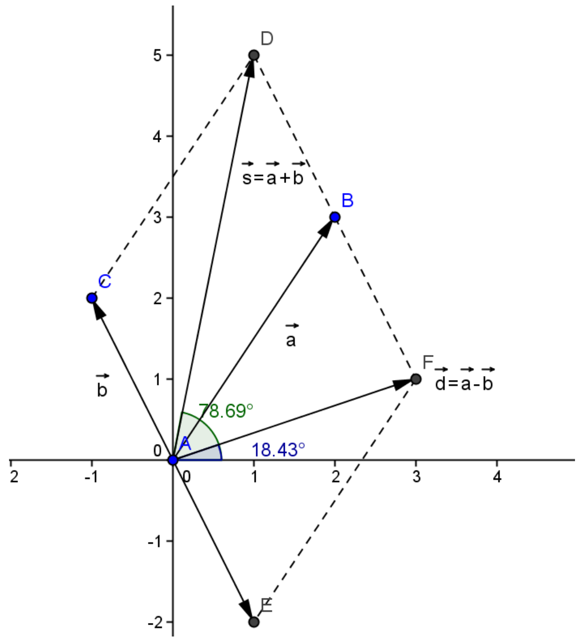
Il vettore somma a avrà come componenti la somma delle componenti dei vettori dai:

$$\vec{s}(\mathrm{s_x}, \mathrm{s_y}) = \vec{s}(\mathrm{v_x} + \mathrm{w_x}, \mathrm{v_y} + \mathrm{w_y})$$

Il vettore differenza avrà come componenti la differenza delle componenti dei vettori dai:

$$\vec{d}(\mathrm{d_x}, \mathrm{d_y}) = \vec{d}(\mathrm{v_x} - \mathrm{w_x}, \mathrm{v_y} - \mathrm{w_y})$$

Esempio:



Dati i vettori $\vec{a}(2,3)$ e il vettore $\vec{b}(-1,2)$

Somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{s}(2-1, 3+2) = \vec{s}(1,5)$$

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{s_y}{s_x} = \tan^{-1}\frac{5}{-1} = -78,7°$$

Differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

$$\vec{d}(2-(-1), 3-2) = \vec{d}(3,1)$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{d_y}{d_x} = \tan^{-1}\frac{1}{3} = 18,4°$$

Prodotto scalare tra due vettori:

Siano dati due vettori $\vec{v}(\mathrm{v_x}, \mathrm{v_y})$ e $\vec{w}(\mathrm{w_x}, \mathrm{w_y})$ e sia α l'angolo compreso tra i due vettori.

Si definisce il prodotto scalare tra due vettori il prodotto del modulo di uno, per il modulo dell'altro per coseno dell'angol o compreso.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{w} \cdot cos\alpha$$

In termini di componenti

$$\vec{v} \times \vec{w} = \mathrm{v_x} \cdot \mathrm{w_x} + \mathrm{v_y} \cdot \mathrm{w_y}$$

Osserviamo che :

Angolo	Prodotto Scalare	Prodotto Scalare
$\alpha = 0°$	$\vec{v} \times \vec{w} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{w} \cdot cos0 = \mathrm{v} \cdot \mathrm{w}$	Valore Massimo $\mathrm{v} \cdot \mathrm{w}$
$0° < \alpha < 90°$	$0 < \vec{v} \times \vec{w} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{w} \cdot cos\alpha < \mathrm{v} \cdot \mathrm{w}$	$< v \cdot w$
$\alpha = 90°$	$\vec{v} \times \vec{w} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{w} \cdot \cos 90 = 0$	0
$90° < \alpha < 180°$	$-vw < \vec{v} \times \vec{w} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{w} \cdot cos\alpha < 0$	< 0
$\alpha = 180°$	$\vec{v} \times \vec{w} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{w} \cdot \cos 180 = -vw$	Valore Minimo $-\mathrm{v} \cdot \mathrm{w}$

Osserviamo:

Il prodotto scalare è massimo in modulo quando l'angolo è 0° o 180°

Due vettori sono perpendicolari se il prodotto scalare è nullo e viceversa.

Prodotto vettoriale tra due vettori:

Siano dati due vettori $\vec{v}(\mathrm{v_x}, \mathrm{v_y})$ e $\vec{w}(\mathrm{w_x}, \mathrm{w_y})$ e sia α l'angolo compreso tra i due vettori.

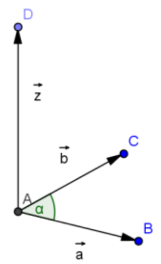
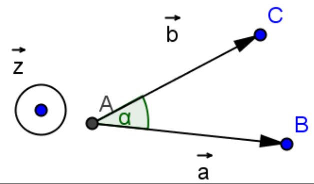
Il prodotto vettoriale tra due vettori $\vec{v} \wedge \vec{w}$, è uguale ad un vettore $\vec{z}$:

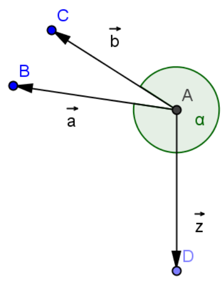
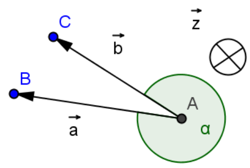
avente come

1) modulo: $z = v \cdot w \cdot sin\alpha$ (il prodotto vettoriale è nullo quando $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli)

2) direzione perpendicolare al piano individuata dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$

3) come verso

a) uscente il piano se $\vec{v}$ si sovrappone a $\vec{w}$, in senso antiorario, con un angolo <180°			Se visto dall'alto il vettore si indica con una punta cerchiata 

b) entrante il piano se $\vec{v}$ si sovrappone a $\vec{w}$, in senso antiorario, con un angolo >180°		se visto dall'alto il vettore si indica con una x cerchiata 

Esempi di vettori: Somma di vettori $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

Caso $\vec{a} \perp \vec{b}$ allora e $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$. 1) $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ 2) $\beta = tan^{-1}\frac{b}{a}$ (Figura 1)

Caso $\vec{a} \perp \vec{b}$ $a = b$ 1) $s = a\sqrt{2}$ 2) $\beta = 45°$ (Figura 2)

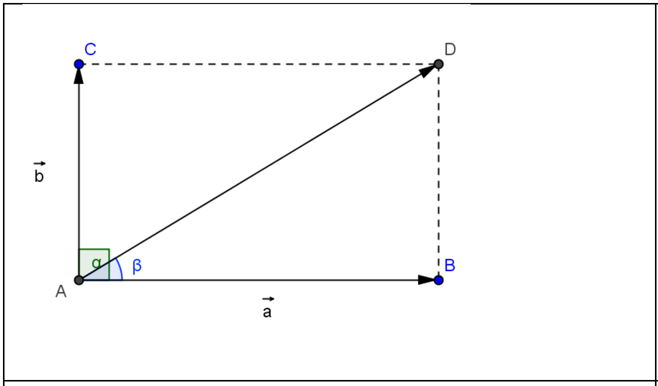


Figura 1

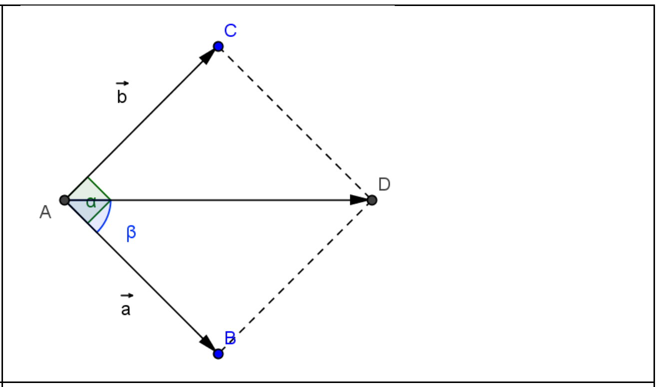


Figura 2

Caso $\widehat{ab} = 60°$ $a = b$ 1) $s = a\sqrt{3} = b\sqrt{3}$ 2) $\beta = 30°$ (Figura 3)

Caso $\widehat{ab} = 120°$ $a = b$ 1) $s = a = b$ 2) $\beta = 60°$ (Figura 4)

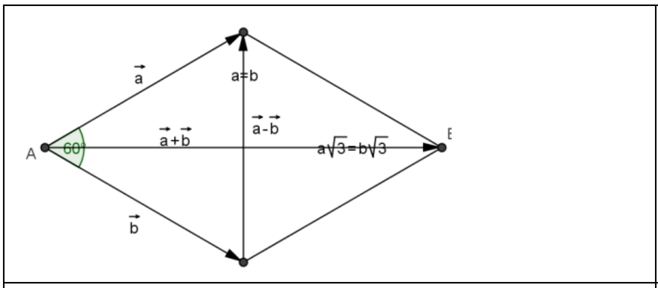


Figura 3

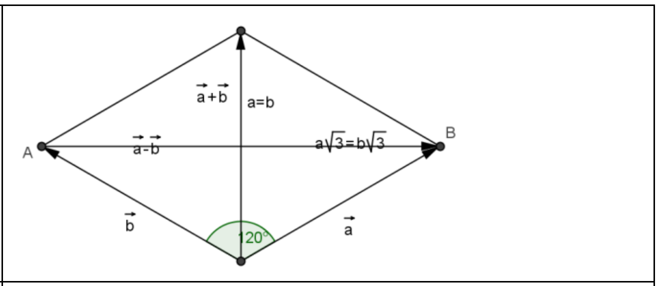
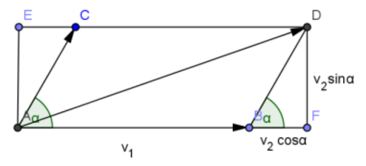


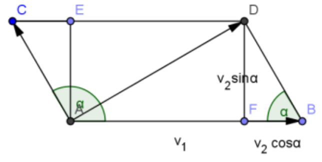
Figura 4

In generale se $\widehat{ab} = \alpha$ $s_x = v_1 + v_2 cos\alpha$ $s_y = v_2 sin\alpha$



$0 \leq \alpha \leq 90°$

Figura 5



$90° \leq \alpha < 180°$

Figura 6