Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE – P.N.I.

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t. La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico G noto con il nome di ***versiera di Agnesi*** [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA;

2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$

3. Si tracci il grafico di G e si provi che l'area compresa fra G e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con a,b,c numeri reali. Si determinino a,b,c in modo che:

1. 1. la funzione f sia pari;
2. 2. $f(0)=2$;

3. $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{3}{2\log 2}$

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a,b,c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.
Si consideri la retta r di equazione $y=4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.
Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.

Si calcoli $\int \dfrac{1}{g(x)} dx \; \} \, dx$.

Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

N° ######/03 Seconda prova scritta

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE – P.N.I.

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. 1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
2. 2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?
3. 3. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 *dm*?
4. 4. Dare un esempio di polinomio P(x) il cui grafico tagli la retta y=2 quattro volte.
5. 5. Dimostrare, usando il ***teorema di Rolle*** [da *Michel Rolle*, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1 = 0$$

6. Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di *b*?
7. Verificare l'uguaglianza

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di p, applicando un metodo di integrazione numerica.

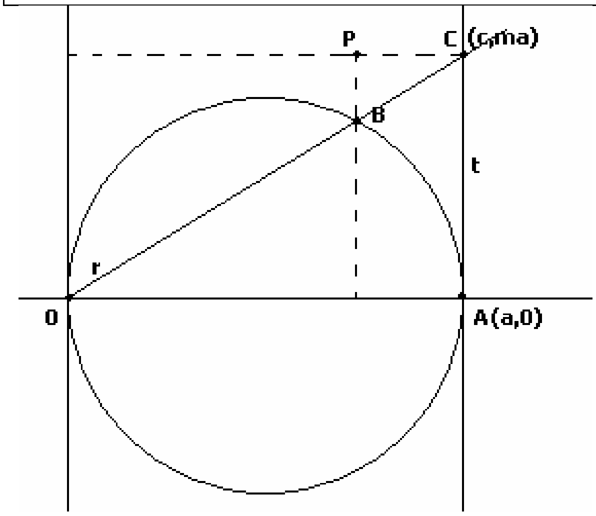
8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$

9. Di una funzione f(x) si sa che ha derivata seconda uguale a *senx* e che $f'(0) = 1$.

Quanto vale $f(\frac{\pi}{2}) - f(0)$?

10. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Problema n°1



La circonferenza, passa per l'origine e ed è tangente alla retta t in A. Se Consideriamo l'il diametro OA sull'asse x e il punto O coincidente con l'origine degli assi allora la circonferenza ha raggio $\frac{a}{2}$ e centro $(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ allora la circonferenza $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ da cui la circonferenza ha equazione $x^2+y^2-ax=0$. Allora il punto B è il punto di intersezione tra la retta r e la circonferenza

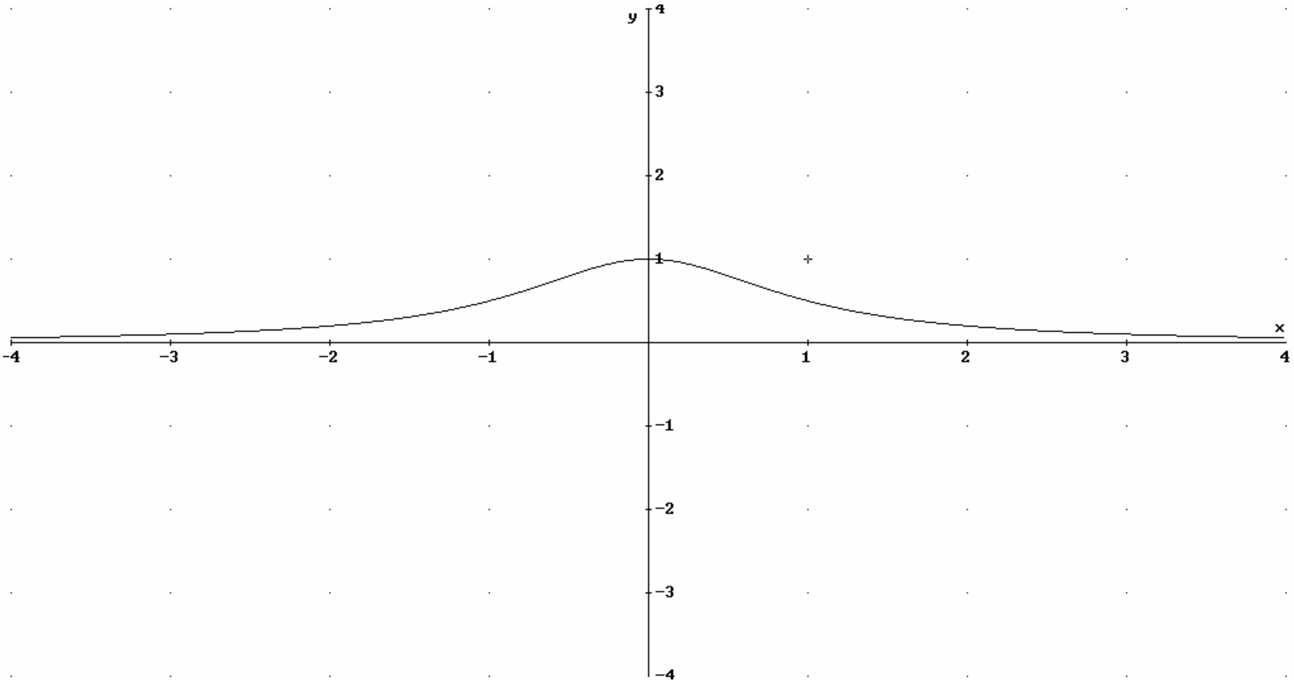
$\begin{cases} x^2+y^2-ax=0 \\ y=mx \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+m^2x^2-ax=0 \\ y=mx \end{cases}$ $\begin{cases} x\left[(1+m^2)x-a\right]=0 \\ y=mx \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x_B=\dfrac{a}{1+m^2} \\ y_B=\dfrac{ma}{1+m^2} \end{cases}$

Considerando che C ha cordinate (a,ma) allora da cui $\begin{cases} x_P=\dfrac{a}{1+m^2} \\ y_P=ma \end{cases}$ elimino m si ha

$\begin{cases} x_P=\dfrac{a}{1+m^2}=\dfrac{a}{1+\dfrac{y^2}{a^2}}=\dfrac{a^3}{y^2+a^2} \\ m=\dfrac{y_P}{a} \end{cases}$ da cui il luogo è $x=\dfrac{a^3}{y^2+a^2}$. Ovviamente abbiamo trovato una funzione x=f(y). Data l'arbitrarietà di scelta degli assi scambiano gli assi (simmetria assiale) e otteniamo $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$

C.E. qualsiasi x appartenente ai Reali.
Curva sempre positiva e mai nulla
Asintoto orizzontale y=0

$y' = -a^3 \dfrac{2x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$ che ha un massimo per x=0



Dato che l'asintoto è uguale a y=0
L'area è uguale a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2}dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2}dx = 2a^2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}d\frac{x}{a} = 2a^2\, arctg\frac{x}{a}\Big|_0^{+\infty} = 2a^2\left(arctg\frac{+\infty}{a} - arctg\frac{0}{a}\right)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2}dx = 2a^2\frac{\pi}{2} = a^2\pi$. La circonferenza avendo raggio $\frac{a}{2}$ ha l'area = $\frac{\pi a^2}{4}$ è quatto volte piccola di quella della curva.

Problema n° 2

1. Se la funzione è pari allora $f(x) = f(-x)$ da cui $a2^x + b2^{-x} + c = a2^{-x} + b2^x + c$;
   $a2^x - a2^{-x} = b2^x - b2^{-x}$; $a(2^x - 2^{-x}) = b(2^x - 2^{-x})$ e quindi $a = b$
2. $f(0) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$ da cui $c = 2 - 2a$
3. $\int_0^1 (a2^x + b2^{-x} + c)dx = \frac{3}{2\log 2}$; da cui
   $\int_0^1 (a2^x + b2^{-x} + c)dx = \left. \frac{a2^x}{\log 2} - \frac{b2^{-x}}{\log 2} + cx \right|_0^1 = \frac{a2}{\log 2} - \frac{b}{2\log 2} + c - \left(\frac{a}{\log 2} - \frac{b}{\log 2} + c0 \right)$ da cui
   considerando che a=b e c=2-2a allora $\frac{2a}{\log 2} - \frac{a}{2\log 2} + 2 - 2a = \frac{3}{2\log 2}$ e quindi
   $\frac{3a}{2\log 2} - 2a = \frac{3}{2\log 2} - 2$ da cui $a\left(\frac{3}{2\log 2} - 2 \right) = \frac{3}{2\log 2} - 2$ dividendo per $\frac{3}{2\log 2} - 2$ si ha
   che $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$

$g(x) = 2^x + 2^{-x}$

C.E. $\forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) = 2^x + 2^{-x} = \frac{2^{2x} + 1}{2^x} \geq 0$ sempre positivo e mai nulla

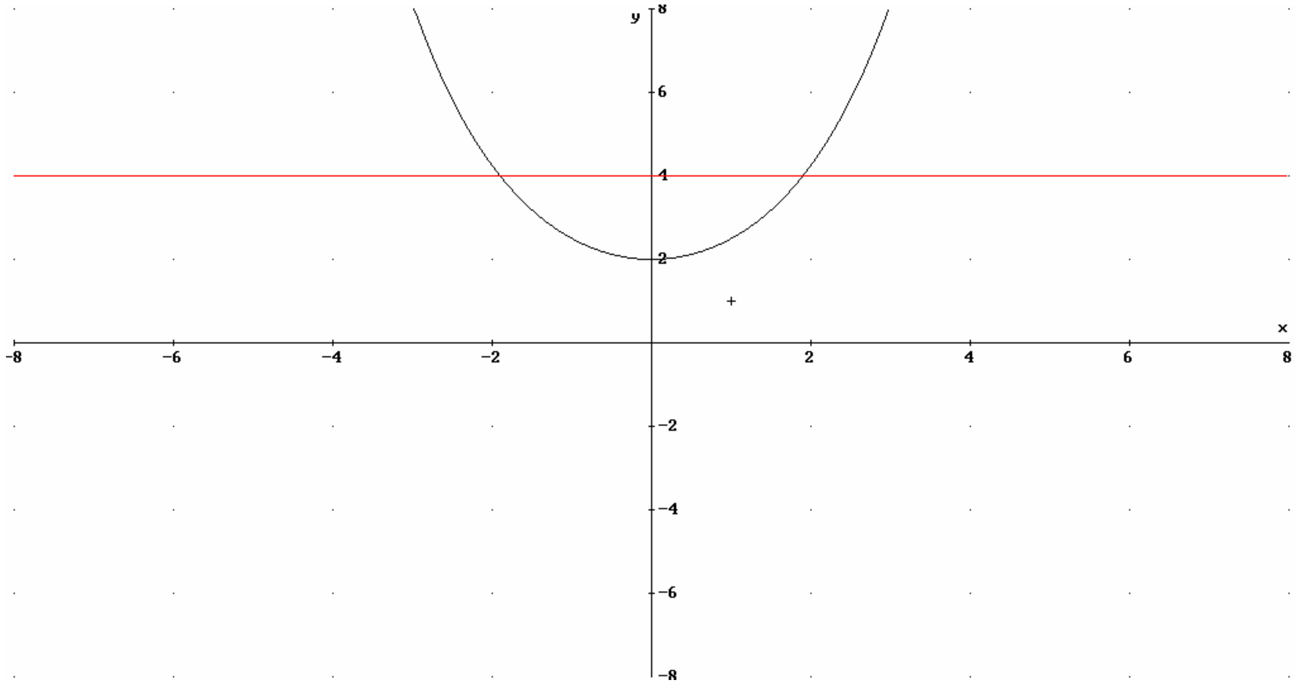
Intersezione con gli assi:

$g(0) = 2$ e nessuna intersezione con l'asse y

$$g'(x) = \left(e^{x\ln 2} + e^{-x\ln 2} \right)' = \ln 2e^{x\ln 2} - \ln 2e^{-x\ln 2} = \ln 2\left(e^{x\ln 2} - e^{-x\ln 2} \right) = \ln 2\left(2^x - 2^{-x} \right) = \ln 2\left(\frac{2^{2x} - 1}{2^x} \right) \geq 0$$

da cui $2^{2x} - 1 \geq 0$ e quindi $2^{2x} \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ da cui x=0 è un minimo

$g''(x) = \ln 2\left(\ln 2e^{x\ln 2} + \ln 2e^{-x\ln 2} \right) = \ln^2 2\left(2^x + 2^{-x} \right) \geq 0$ concavità sempre verso l'alto nessun flesso.



Evidentemente le soluzioni per cui $g(x) = 2^x + 2^{-x} = 4$ sono due (simmetriche) . Considerando $z(x) = 2^x + 2^{-x} - 4$ applico il metodo di bisezione nell'intervallo $[1,3]$ infatti

$z(1) = 2 + 2^{-1} - 4 = -1.5 < 0$, $z(1) = 2^3 + 2^{-3} - 4 = 4.125 > 0$

n	a	b	m	fa	fb	fm	fa*fm
0	1	3	2	-1,5	4,125	0,25	-0,375
1	1	2	1,5	-1,5	0,25	-0,81802	1,227029
2	1,5	2	1,75	-0,81802	0,25	-0,33911	0,277401
3	1,75	2	1,875	-0,33911	0,25	-0,05936	0,020129
4	1,875	2	1,9375	-0,05936	0,25	0,091482	-0,00543
5	1,875	1,9375	1,90625	-0,05936	0,091482	0,01512	-0,0009
6	1,875	1,90625	1,890625	-0,05936	0,01512	-0,02235	0,001327
7	1,890625	1,90625	1,898438	-0,02235	0,01512	-0,00367	8,21E-05

$x_1 = 1.898$ e dato che la funzione è pari $x_2 = -1.898$

$\frac{2^{2x}+1}{2^x} = 4$ da cui $2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0$ $2^x = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$: da cui $\beta = \log_2(2+\sqrt{3})$ e

$\alpha = \log_2(2-\sqrt{3}) = -\log_2(2+\sqrt{3})$

$$\int_\alpha^\beta (2^x + 2^{-x} - 4)dx = 2\int_0^\beta (2^x + 2^{-x} - 4)dx = 2\left(\frac{2^x}{\log 2} - \frac{2^{-x}}{\log 2} - 4x\right)\Bigg|_0^\beta = 2\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\log 2} - \frac{2-\sqrt{3}}{\log 2} - 4\log_2(2+\sqrt{3})\right)$$

$$= 2\frac{2\sqrt{3} - 4 \cdot \log(2+\sqrt{3})}{\log 2} \simeq 2 \cdot 2{,}6 = 5{,}2$$

$\int \frac{dx}{2^x + 2^{-x}}$ ponendo $2^x = t$ si ha che $\ln 2 \cdot 2^x dx = dt$, $2^{-x} = \frac{1}{t}$ e $\ln 2 \cdot t \cdot dx = dt$

$$\frac{1}{\ln 2} \int \frac{\frac{dt}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{\ln 2} artgt + \cos t = \frac{1}{\ln 2} artg 2^x + \cos t$$

$\begin{cases} x' = x \\ y' = 8 - y \end{cases}$ da cui $8 - y = 2^x + 2^{-x}$ da cui $y = -(2^x + 2^{-x}) + 8$

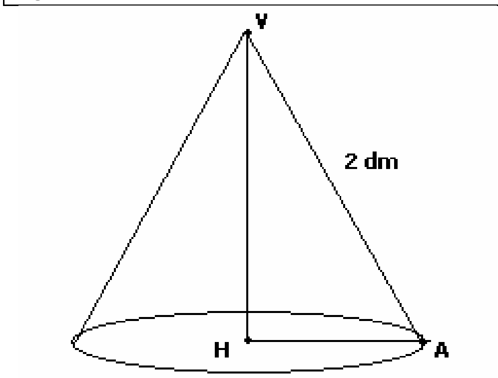
Quesito n°1

Dato che le squadre sono 18. Ogni squadra può incontrare altre 17 squadre per tutte le 18 squadre allora le partite saranno 18 *17=306

Quesito n°2

$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{100} = \frac{35}{300} \simeq 0{,}1167$

Quesito n°3



VA=2dm $VH = x$ $AH = \sqrt{4 - x^2}$ da cui

$Vol = \frac{1}{3} \pi x \left(4 - x^2\right)$ $Vol' = \frac{1}{3} \pi \left(4 - 3x^2\right)$ da cui $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ e quindi

$Vol = \frac{1}{3} \pi \sqrt{\frac{4}{3}} \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \pi \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{27} \pi \text{ dm}^3 = \frac{16\sqrt{3}}{27} \pi \cdot 10^3 \text{ cm}^3$

Quesito n°4

Un polinomio che incontra l'asse x in 4 punti può essere $y = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ facendo una traslazione il polinomio richiesto è $y = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) + 2$

Quesito n°5

Nell'Ipotesi che il polinomio $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... a_1 x + a_0$ ammetta due radici x_1 e x_2 allora il polinomio (che è la sua derivata) $f'(x) = nx^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + ... a_1$ per il terorema di Rolle applicato all'intervallo $\left[x_1, x_2\right]$ dato che $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ammetterà una radice $c \in \left(x_1, x_2\right)$.

Quesito n°6

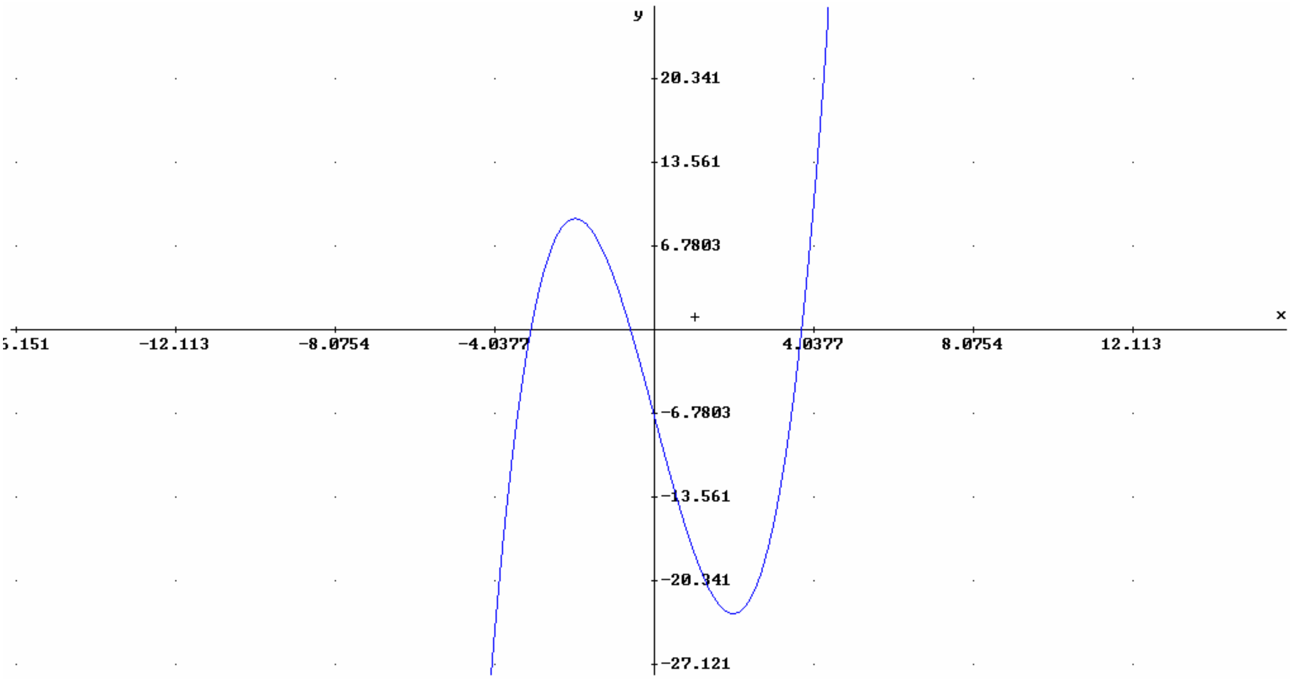
Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Per avere tre radi reali deve intersecare tre volte l'asse x.

Questo si può ottenere avendo un massimo positivo e un minimo negativo. Allora derivando $y = x^3 + bx - 7$ ottengo che $y' = 3x^2 + b$ per per annullasi necessariamente deve avere b<0.
Prendendo per esempio b=-12 ottengo che $y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$ soluzioni -2 (max)e 2 (min)
Che sostiendo a $y = x^3 - 12x - 7$ mi danno $f(-2) = -8 + 12 \cdot 2 - 7 = 9$
$f(2) = 8 - 12 \cdot 2 - 7 = -23$ ovvero i massimi e minimi richiesti

Poiché $x = \pm\sqrt{\frac{-b}{3}}$ per $f(x) = \left(-\sqrt{\frac{-b}{3}}\right)^3 - b\sqrt{\frac{-b}{3}} - 7 > 0$ $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(-b)^3}{3}} + \sqrt{\frac{(-b)^3}{3}} - 7 > 0$

$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{(-b)^3}{3}} > 7$ $\sqrt{\frac{(-b)^3}{3}} > \frac{21}{2}$ $(-b)^3 > \frac{3 \cdot 441}{4} = \frac{3 \cdot 441}{4}$ $b < -\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 441}{4}} \simeq -6{,}92$

per tali valori , e per $x = \sqrt{\frac{-b}{3}}$ è sicuramente $f(x) < 0$.



Quesito n°7

L'uguaglianza $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ è presto dimostrata dato che $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = 4(\arctan 1 - arcont 0) = 4\frac{\pi}{4}$

Dividendo l'intervallo $[1,4]$ ottendo $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0,25$ e quindi ottengo che

n	x	fx
0	0	1
1	0,083333	0,993103
2	0,166667	0,972973
3	0,25	0,941176
4	0,333333	0,9
5	0,416667	0,852071
6	0,5	0,8
7	0,583333	0,746114
8	0,666667	0,692308
9	0,75	0,64
10	0,833333	0,590164
11	0,916667	0,543396
12	1	0,5

$s = \frac{1-0}{4}\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right) = 0{,}805942145$

$S = \frac{1-0}{4}\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right) = 0{,}764275478$

Facendo $I = \frac{s+S}{2} = 0{,}785108812$ questo numero per 4 mi da l'integrale richiesto

$I = 0{,}785108812 \cdot 4 = 3{,}140435247$

Come si vede non è un buon metodo di approssimazione ci sono voluti 12 passi.

Se io uso questa formula $I = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + ...2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right)$

Ossia la somma i gli indici dispari moltiplicati per 4 e gli indici pari moltiplicati per due.. più il valore iniale e finale. Per $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$ diviso 3

N.	x	fx	
0	0	1	1
1	0,25	0,941176	3,764706
2	0,5	0,8	1,6
3	0,75	0,64	2,56
4	1	0,5	0,5

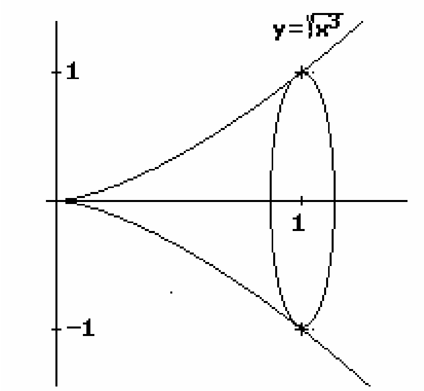
$\Delta x = \frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{4} = 0,25$ $I = \frac{0,25}{3}(1 + 3,764706 + 1,6 + 2,56 + 0,5) = 0,78539$ che moltiplicato per 4

$I = 0{,}78539 \cdot 4 = 3{,}14156$ (precisione in solo 4 passaggi di 4 cifre)

Quesito n°8

Secondo la formula dei soli di rotazione attorno all'asse x $\int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x)dx$ se io prendo la funzione

$y=\sqrt{x^3}$ $\int_0^1 \pi\left(\sqrt{x^3}\right)^2 dx$ **rappresenta il solido ottenuto dalla rotazione della funzione attorno all'asse x e delimitao dai piani x=0 e x=1**



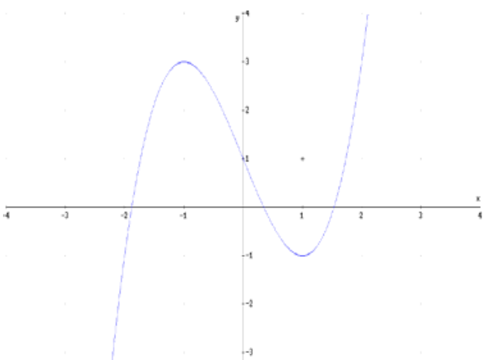
Quesito n°9

$f''(x)=\sin(x)$ $f'(x)=\int \sin(x)dx+\cos t=-\cos x+\cos t$ $f'(0)=-1+\cos t=1$ **da cui cost=2**

allora $f(x)=\int(-\cos(x)+2)dx=-\sin x+2x$ **+cost Allora**

$f(\frac{\pi}{2})-f(0)=-\sin\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{2}+\cos t-(0-0+\cos t)=-1+\pi$

Quesito n°10



$f(x)=x^3-3x+1$ **ammette tre soluzioni perché** $f'(x)=3x^2-3x=3(x^2-1)$ **ha soluzioni x=-1 e x=1 che sono minimo e massimo.** $f(-1)=-1+3+1=3>0$ $f(1)=1-3+1=-1<0$ **per i teoremi di continuità ammette sicuramente tre soluzioni.**

x = 0.34375

n	A	b	m	fa	fb	fm	fa*fm
0	0	1	0,5	1	-1	-0,375	-0,375
1	0	0,5	0,25	1	-0,375	0,265625	0,265625
2	0,25	0,5	0,375	0,265625	-0,375	-0,07227	-0,0192
3	0,25	0,375	0,3125	0,265625	-0,07227	0,093018	0,024708
4	0,3125	0,375	0,34375	0,093018	-0,07227	0,009369	0,000871